



GÜNTHER SAGER

## DIE MATHEMATISCHE DARSTELLUNG DES GROSSENWACHSTUMS VON ČSSR-KINDERN NACH DATEN VON KLEMENTA, KOMENDA UND MITARBEITERN

**ZUSAMMENFASSUNG.** — Nach einer Rückschau auf die Bemühungen, das Humanwachstum der Körperhöhe mathematisch in den Griff zu bekommen, wird eine in jüngster Zeit vom Verfasser entwickelte Formulierung auf das Wachstum von ČSSR-Kindern nach Daten von KLEMENTA, KOMENDA und Mitarbeitern angewandt. Dabei wird der Größenwuchs in eine Basisfunktion und den bekannten, aber a priori nicht definierbaren Wachstumsschub zerlegt, wobei nichtlineare Regressionen bzw. semigraphische Verfahren Verwendung finden. Die Ergebnisse für das Wachstum und den Zuwachs oder die Wachstumsgeschwindigkeit sind in Tabellen und graphischen Darstellungen wiedergegeben. Abschließend werden Empfehlungen für die Gewinnung von Wachstumsdaten in der Zukunft gegeben und die Wachstumsanteile am Endwert für sechs Meßserien aus verschiedenen Ländern nach Analysen des Verfassers einander gegenübergestellt.

**ABSTRACT.** — Mathematical representation of height growth of Czech children after data by KLEMENTA, KOMENDA and collaborators. After a brief review of almost a century's endeavours to analyze mathematically human height growth attention is drawn to new possibilities elaborated by the author, and already tested for growth series from the GDR, FRG, England and Japan. The basic idea is gained from a look to the human growth curve, having the form of a simple parabola from birth to about pubescence. By adequate modifications a farther reaching basic growth function with restricted height development can be attained which has to be complemented by addition of a growth spurt term. The parameters of both functions are adjusted by non-linear regressions or semigraphic methods for the height values of Czech children as compiled by KLEMENTA, KOMENDA and co-workers in 1970–1971 and 1978. This procedure seemed to involve a certain risk due to the lacking of data for children up to three years of age. After the same difficulties had been overcome for GDR values, work was taken up with the results of growth and increase determinations for the ♂ and ♀ given in tables and graphs in this paper. Finally a comparison of relative growth in respect to the final height is presented for six series of human growth.

**KEY WORDS:** Kinderwachstum — Tschechoslowakische Kinder — Wachstumsgeschwindigkeit.

### 1. RÜCKBLICK AUF BISHERIGE VERSUCHE DER FORMELMÄSSIGEN ERFASSUNG

Seit fast einem Jahrhundert hat man neben der Erfassung der menschlichen Körpergröße durch

Messungen auch den Wunsch gehegt, wenigstens einzelne Epochen durch mathematische Formeln auszudrücken. Dabei nahm man für die prä- und postnatale Entwicklung zunächst einfache Potenzfunktionen an wie Wiener (1890), Friedenthal (1914), Pfaundler (1916), Reinius (1916) und Schmal-

hausen (1927). Danach ging man zu Exponentialfunktionen über, die einzeln oder als Summen Verwendung gefunden haben.

Als herausragender Vertreter dieser Richtung darf Backman (1934) gelten, der das Wachstum bis zum adulten Status in 3 Phasen — Geburt bis etwa 7 Jahre, von dort bis zur Pubeszenz und schließlich die puberale Phase — zerlegte und Serien menschlichen Wachstums analysierte, wobei er seinen Vorgängern weit überlegen war. Ein historisches Dokument ist dabei das überdurchschnittlich kräftige Wachstum des französischen Grafensohns Montbeillard geworden, das zur Zeit vom Verfasser noch einmal aufgegriffen worden ist, wobei sich eine für die damalige Zeit beachtlich gute Arbeit durch Backman herausgestellt hat (Sager 1982d).

Mit dem Aufkommen der Wachstumsforschung im tierischen Bereich wurden in dieser Zeit auch die klassischen Funktionen nach Gompertz (1825) sowie Verhulst (1838) — er schuf bekanntlich die logistische Funktion (Hyperbeltangens) — zur Erfassung von Abschnitten des Humanwachses herangezogen. Dazu trat der Arkustangens, der in leichter Modifikation wie der Hyperbeltangens von Scharf und Peil (1975) und Scharf (1977, 1979) angewandt wurde. In neuerer Zeit benutzte man Summen dieser Funktionen mit gutem Erfolg für die Approximation von Etappen des menschlichen Wachstums, wobei Peil und Helwin (1977) und Peil (1979) zu nennen sind. Dabei tritt allerdings der Begriff der Wachstumsfunktion als kompaktes mathematisches Gebilde um so weiter zurück, je mehr Teilfunktionen die Summe enthält.

Aus diesem Grund hat der Verfasser Überlegungen angestellt, um die Anzahl der Partialfunktionen so weit wie möglich zurückzudrängen. Dabei bietet der charakteristische Verlauf der Kurven des menschlichen Höhenwachstums selbst den besten Anhaltspunkt: Das anfangs sehr schnelle Wachstum klingt im Laufe der Jahre immer mehr ab, bis es mit einsetzender Pubertät wieder kräftig ansteigt und gegen die adulte Phase hin praktisch aufhört. Man kann also zwischen einem Basiswachstum und einem additiv aufgesetzten Wachstumsschub unterscheiden, wobei es wichtig ist, die Nahtstelle beider Formen zu kennen, die dort liegt, wo die Differenz benachbarter Größenwerte vorübergehend einen kleinsten Wert erreicht. Es bleibt nun die Frage, ob man für beide Anteile des Humanwachstums geeignete mathematische Ausdrücke finden kann.

## 2. DIE ERFASSUNG DES BASISWACHSTUMS DER KÖRPERHÖHE

Eine jahrzehntelang übersehene einfache Relation zwischen Körperhöhe und Wachstum trifft für die halbe Zeit von der Geburt bis zum adulten Status zu, nämlich

$$L = L_0 + kt^r, \quad (1)$$

die erst 1979 vom Verfasser als Sonderform einer allgemeineren Funktion aufgedeckt wurde und des-

halb als Kurzform bezeichnet wird (siehe Tab. 2 und 3). Darin bedeutet  $L$  die Länge oder Höhe  $t$  Jahre nach der Geburt und  $L_0$  zur Zeit der Geburt. Die Größen  $k$  und  $r$  sind Parameter, wobei  $r$  in der Nähe von 0,5 liegt, so daß man eine Kurve vor sich hat, die der liegenden Parabel sehr nahekommt.

TABELLE 1. Ergebnisse der nichtlinearen Regression bzw. semigraphischen Bestimmung der Parameter für das Wachstum von CSSR-Kinder

	♂		♀	
	[1]	[2]	[1]	[2]
$r$	0,55125	0,52449	0,56500	0,53533
$s$	4,34062	5,05066	2,63125	4,78747
$L_E$ [cm]	159,0	158,449	150,5	154,780
$L_0$ fix	50,0	50,0	50,0	50,0
$t_E$ fix	18,0	18,0	17,0	17,0
$a$ [cm]	7,4	nicht	nicht	4,8
$b$ [ $a^{-1}$ ]	0,60	weiter	weiter	0,59
$t^*$ [a]	13,6	bearbeitet	bearbeitet	11,5
$L_E + 2a$ [cm]	173,8	bearbeitet	bearbeitet	163,38

Da (1) jedoch über alle Grenzen wächst, kann sie als Basisfunktion des Wachstums über die ersten 7 bis 10 Jahre hinaus nicht appliziert werden. Man muß sie vielmehr so modifizieren, daß ihr Anstieg mit der Zeit gebremst wird und sie mit dem Ausklang des Höhenwachstums in  $t = t_E$  ein Maximum  $L = L_E$  erreicht. Diese Bedingung läßt sich über verschiedene Funktionen erfüllen, nur sollten sie nicht zu kompliziert sein. Nach einer Reihe von Überlegungen ist der Ausdruck

$$L = L_0 + A \left( \frac{t}{t_E} \right)^r \left[ B - \left( \frac{t}{t_E} \right)^s \right] \quad (2)$$

mit

$$A = (L_E - L_0) \frac{r}{s} \text{ und } B = \frac{s}{r} + 1$$

gewählt und getestet worden (SAGER 1981), der die genannten Bedingungen erfüllt, d. h. für  $t = 0$  den Geburtswert  $L_0$  und für  $t = t_E$  den Endwert  $L_E$  ergibt, wobei das Maximum von (2) über die zeitliche Differentiation

$$\dot{L} = C \left( \frac{t}{t_E} \right)^{r-1} \left[ D - \left( \frac{t}{t_E} \right)^s \right] \quad (3)$$

mit

$$C = (L_E - L_0) \frac{r(r+s)}{st_E}, \quad D = 1$$

bei  $t = t_E$  mit  $L = L_E$  richtig wiedergegeben wird. (3) wird als Basisfunktion des Zuwachses bezeichnet, der mit der Wachstumsgeschwindigkeit identisch ist. Da wegen  $0 < r < 1$   $\dot{L}(0)$  unendlich groß wird, darf (3) nicht auf die ersten postnatalen Quartale des schnellen Wachstums angewendet werden, wogegen (2) durch die richtige Wiedergabe des Ge-

TABELLE 2. Approximation der Körperhöhe von ČSSR-Kindern ♂ [1]

Alter		Probanden Länge		Kurzform	Basisfunktion	Endform	Prozent des Endwerts
$t$ [a]	$n$	[cm]					
0	—	(50,0)	50,00	50,00	50,00	(28,77)	
(1)	—	—	(74,97)	(74,97)		(43,15)	
(2)	—	—	(86,59)	(86,59)		(49,82)	
3	104	99,3	95,75	95,75	Werte wie Basisfunkt.	55,09	
4	149	104,3	103,60	103,60		59,61	
5	182	110,6	110,63	110,60		63,64	
6	229	116,3	117,04	116,98		67,31	
7	318	122,3	122,99	122,85		122,86	70,69
8	280	128,3	128,56	128,30		128,32	73,83
9	227	133,5	133,83	133,37		133,43	76,77
10	200	138,2	138,84	138,06		138,25	79,55
11	278	143,0	143,64	142,39		143,02	82,29
12	249	148,1	148,24	146,33		148,22	85,28
13	261	155,4	152,67	149,85		154,70	89,01
14	309	161,0	156,95	152,90		162,04	93,23
15	289	167,5	161,10	155,42		167,89	96,60
16	486	171,7	165,12	157,34		171,35	98,59
17	644	172,8	169,03	158,57		173,12	99,61
18	590	174,0	172,84	159,00		173,73	99,96

TABELLE 3. Approximation der Körperhöhe von ČSSR-Kindern ♀ [2]

Alter		Probanden Länge		Kurzform	Basisfunktion	Endform	Prozent des Endwerts
$t$ [a]	$n$	[cm]					
0	—	(50,0)	50,00	50,00	50,00	30,42	
(1)	—	—	(75,56)	(75,56)		(45,97)	
(2)	—	—	(87,05)	(87,05)		(52,96)	
3	106	98,7	96,03	96,03	Werte wie Basisfunkt.	58,42	
4	132	103,5	103,69	103,69		63,08	
5	145	109,1	110,51	110,49		67,22	
6	225	115,1	116,71	116,66		116,67	70,98
7	282	122,8	122,45	122,34		122,39	74,46
8	269	127,8	127,82	127,60		127,75	77,72
9	303	133,0	132,88	132,48		132,96	80,89
10	281	138,3	137,69	136,99		138,39	84,19
11	420	145,0	142,28	141,13		144,56	87,94
12	470	150,4	146,68	144,84		151,01	91,87
13	411	156,5	150,91	148,10		156,30	95,08
14	346	160,4	155,00	150,83		159,95	97,30
15	504	162,5	158,95	152,93		162,38	98,78
16	197	164,0	162,78	154,29		163,84	99,67
17	300	164,1	166,50	154,78		164,37	99,99

burts werts  $L_0$  in den ersten Lebensmonaten nur kleinere Abweichungen vom wirklichen Verlauf erfährt.

In der Praxis wird die Basisfunktion (2) durch die Eingabe der Werte  $t_1$ ,  $L_1$  von der Geburt bis zur Pubeszenz in eine nichtlineare Ausgleichung festgelegt, bei den ČSSR-Kindern bis 10 Jahre (♂) bzw. 9 Jahre (♀). Die über Näherungsformeln gewonnenen Startwerte der Parameter  $r$ ,  $s$  und  $L_E$  (Sager, 1981) und die aufgrund der Meßwerte bekannten  $L_0$  und  $t_E$  führen zu der aus der nichtlinearen Regression gewonnenen Basisfunktion. Sie ist bis zur Pubeszenz praktisch der alleinige Träger des Wachstums, muß danach aber noch additiv um den puberalen Wachstumsschub ergänzt werden.

### 3. DIE ERMITTLUNG DES PUBERALEN WACHSTUMSSCHUBS

Mit dem Begriff Wachstumsschub wird sehr freimütig umgegangen zumal er sich bei einem Blick auf die Wachstumskurven (Abb. 1 und 2) so gleich anzubieten scheint. Dennoch hat dieser Begriff seine Schwierigkeiten, die leichter verständlich werden, nachdem bereits von einem Basiswachstum die Rede war. Alle, die den Ausdruck Wachstumsschub benutzen, sollten sich eigentlich fragen, wie man diese visuell so einleuchtende Größe definieren kann? Die Antwort ist einfach und verblüffend zugleich: Es gibt keine befriedigende Definition, weil man diese Größe nicht direkt fassen kann.

Bei Meßreihen der Körpergröße in engen zeitlichen Abständen und bei sehr genauen Angaben der Höhenwerte läßt sich zwar der Zeitpunkt des Einsetzens dieses Schubs relativ genau bestimmen, nicht aber sein Betrag. Es ist auf keinen Fall statthaft, die Differenz der Körperhöhe zwischen adultem und pubescentem Status zu nehmen, weil auch wachstumsgestörte Kinder in diesem Zeitpunkt im allgemeinen nicht abrupt zu wachsen aufhören, sondern eher ein weiter vermindertes Wachstum in Form der über die Pubeszenz hinausgeführten Basisfunktion haben.

Die Definition einer Basisfunktion mit den für die ČSSR-Kinder in den Tabellen 2 (♂) und 3 (♀) berechneten Werten von der Geburt bis zur Pubeszenz legt für die danach folgenden Jahre bis zum Abschluß des Höhenwachstums einen Trend fest, der über die Formel (2) und die nichtlineare Ausgleichung gewonnen wird. Er ist zwar ebenfalls nicht eindeutig, weil man statt (2) auch eine andere Funktion finden, das Ausgleichsintervall leicht variieren kann und sich schließlich sowohl die Summen der Fehlerquadrate — abgekürzt als [2] —, Fehlerbeträge [1] oder auch Fehlerwurzeln [1/2] nach der

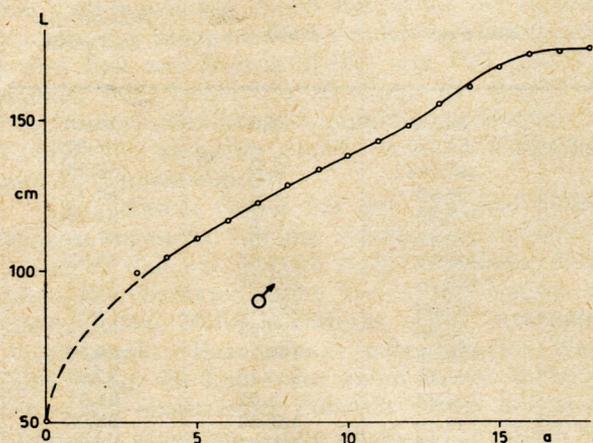


ABB. 1. Approximation des Wachstums der Körperhöhe von ČSSR-Kindern ♂.

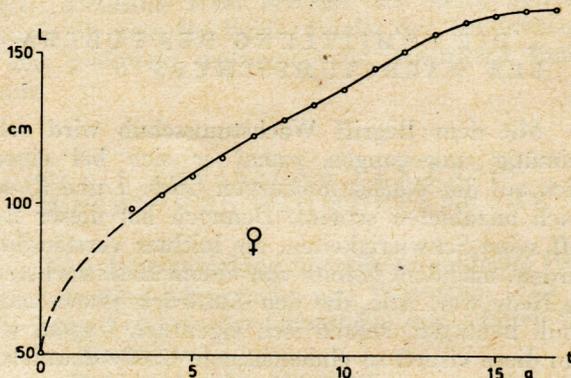


ABB. 2. Approximation des Wachstums der Körperhöhe von ČSSR-Kindern ♀.

Methode von Paul (1975) minimieren lassen. Dennoch ist dies eine Möglichkeit, dem Begriff des Wachstumsschubs sinnvoll nahezukommen.

Bildet man nun von der Pubeszenz bis zum adulten Status die Differenzen zwischen den Meßwerten und den Daten der Basisfunktion für die vorhandenen Meßtermine, so schält sich eine Punktfolge heraus, die sich bei verlässlichen Meßreihen und günstiger Wahl des Ausgleichsintervalls vor der Pubeszenz wie bei den ČSSR-Kindern relativ leicht zu einer Kurve verbinden läßt, wobei natürlich noch Abweichungen vorhanden sind. Diese Punktfolge kann man semigraphisch oder ebenfalls über eine nichtlineare Regression einer Funktion anpassen, als die sich bisher der mit der logistischen Funktion von Verhulst (1838) identische Hyperbel tangens

$$\begin{aligned} \Delta L &= a[1 + \operatorname{tanh} b(t - t^*)] = \\ &= 2a/[1 + e^{-2b(t - t^*)}] \end{aligned} \quad (4)$$

mit dem Schubzuwachs

$$\Delta \dot{L} = \frac{ab}{\cosh^2 b(t - t^*)} = ab[1 - \operatorname{tanh}^2 b(t - t^*)] \quad (5)$$

bewährt hat.

Dabei ist  $2a$  der Betrag zwischen den beiden Asymptoten von (4) und damit ein Maß für die Stärke des Schubs,  $b$  bedeutet einen Ausdruck für die Steilheit des Anstiegs und  $t^*$  das zeitliche Zentrum des Schubs mit dem stärksten Anstieg ( $t^* = L = ab$ ). Die Zuwachs- oder Geschwindigkeitsfunktion (5) des Schubs hat die Gestalt einer Glockenkurve mit beiderseits allmählich auf  $L(\pm\infty) = 0$  abfallenden Werten.

#### 4. DIE AUSGANGSDATEN UND RESULTATE DER NICHTLINEAREN AUSGLEICHUNG

Es gibt nur wenige Meßreihen (Somatogramme) in der Welt, die sowohl von der Anzahl der Probanden als auch den Meßterminen her für eine Bearbeitung und Präzisierung über Wachstumsformeln geeignet sind. Bisher wurden vom Verfasser fünf solcher Somatogramme ausgewertet, wonach hier das sechste folgt. Unerlässlich ist dabei die Kenntnis der Geburtswerte bzw. ein guter Ersatzwert, weiter sollen die Reihen möglichst lückenlos sein. Eine Äquidistanz der Werte ist nicht Bedingung, wird aber meistens bevorzugt.

Vollständige Meßreihen haben geliefert: Mellbrügge und Vogt (1961) für die BRD, Tanner, Whitehouse und Takaishi (1965) in England und Arimoto—Yanagi (1960, 1949) für Japan. Die Reihen haben bei der Bearbeitung die wenigsten Schwierigkeiten bereitet (Sager, 1982a, b, 1983). Als bedingt kombinierbar erwiesen sich Meßdaten von Maaser (1974) und Freyer (1971) aus unterschiedlichen Regionen der BRD (Sager, 1981). Ein Fehlen der Größenangaben vor 3 Jahre konnte nach den Normtafeln von Marcusson—Oehmisch (1961) unter Postulieren der Geburtswerte für die DDR noch

überbrückt werden (Sager, 1982c). Diese Tatsache hat für die gleiche Situation in der ČSSR nach Daten von Klementa, Komenda und Mitarbeitern (1970–1971, 1978) erst die Zuversicht gegeben, auch diese Bearbeitung vorzunehmen. Ein Überblick zu den bisher analysierten Meßreihen ist in der *Tabelle 4* zu finden.

In *Tab. 1* sind die Ergebnisse der Parameter für die Funktionen (2) und (4) nach nichtlinearen Regressionen bzw. semigraphischen Bestimmungen zusammengestellt. Für die Übernahme in die *Tab. 2* und *3* sind von den beiden Minimierungen [1] und [2] jeweils die am besten geeigneten herangezogen worden. Die Unterschiede in beiden Minimierungen sind zum Teil auf Streuungen im Ausgangsmaterial zurückzuführen. Wegen der nicht allzu großen Anzahl  $n$  und ihren Unterschieden für die einzelnen Altersgruppen sind die Ausgangsdaten mit  $n/100$  gewichtet und dann in die nichtlinearen Regressionen eingegeben worden.

In *Tab. 2* und *3* sind für die ♂ und ♀ die Meßtermine  $t_i$ , Anzahl der Probanden  $n_i$ , Körpergrößen  $L_i$  sowie die Kurzform (1), Basisfunktion (2) und der Endwert als Summe aus (2) und (4) verzeichnet. In der letzten Spalte steht der prozentuale Anteil am Endwert  $L_E + 2a$ , der zum Vergleich mit den Ergebnissen für andere Länder in *Tab. 5* geeignet ist. Die mittleren Abweichungen betragen für die ♂ 0,55 cm und für die ♀ 0,58 cm, wozu natürlich Streuungen im Ausgangsmaterial beitragen. In *Abb. 1* und *2* ist der Ablauf der Approximationen ♂ und ♀ neben den Ausgangsdaten dargestellt.

In den *Abb. 3* und *4* ist der Zuwachs bzw. die Wachstumsgeschwindigkeit für die ♂ und ♀ nach den Formeln (3) plus (5) voll ausgezogen bzw. (3) unterbrochen gezeichnet worden. Man erkennt darin die anfangs hohen Werte des Zuwachses der Körpergröße, die sehr schnell abnehmen und dann für den Gesamtwert ein Minimum erreichen, während der Zuwachs der Basisfunktion weiter abfällt. Ab etwa 9 bis 10 Jahre macht sich der Schubzuwachs bei den ♂ bemerkbar, bei den ♀ ab etwa 8 Jahre, wonach dann Maxima in der Nähe der jeweiligen Werte von  $t^*$  (siehe *Tab. 1*) erreicht werden.

Der besondere Wert von *Abb. 3* und *4* liegt darin, daß man ohne eine mathematische Analyse den Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeit nur unmittelbar aus den Körperhöhen durch Bildung von Differenzenquotienten zu benachbarten Terminen bekommt. Die parabolische Interpolation

$$\dot{L} \left( \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \right) = \frac{L_{i+1} - L_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad (6)$$

die für nicht zu steilen Abfall der Werte von  $L$  gilt, ergibt dabei einen gezackten Linienzug, der bei größeren Streuungen der Ausgangsdaten manchmal ein groteskes Bild bietet. Von diesem Verhalten kann sich der Leser durch einfache Berechnung von  $L$  zu den Terminen  $t = 3,5, 4,5, 5,5$  etc. aus den Werten von  $L$  in *Tab. 2* und *3* ein Bild machen, wobei  $t_{i+1} - t_i = \Delta t = 1$  wird und man nur noch benachbarte Differenzen der Höhenwerte bei ganzzahligen  $t$  zu bilden braucht.

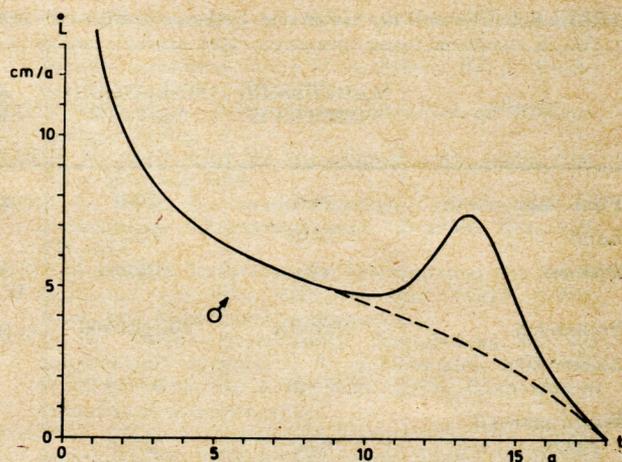


ABB. 3. Approximation des Zuwachses der Körperhöhe von ČSSR-Kindern ♂.

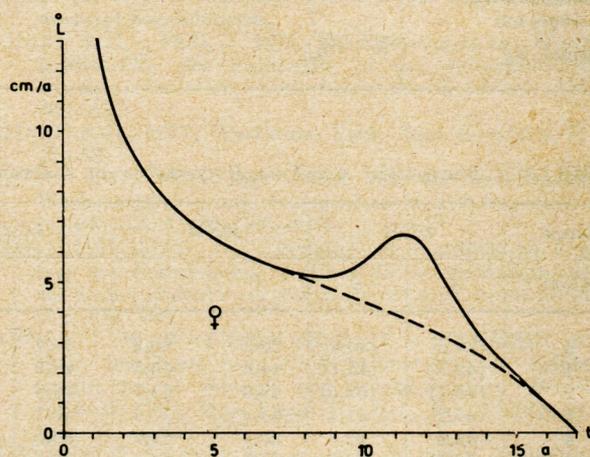


ABB. 4. Approximation des Zuwachses der Körperhöhe von ČSSR-Kindern ♀.

## 5. VERGLEICH VERSCHIEDENER ANALYSEN DES KÖRPERHÖHENWACHSTUMS

Im letzten Teil dieses Beitrags soll eine Gegenüberstellung des Verlaufs des menschlichen Höhenwachstums nach verschiedenen, vom Verfasser analysierten Somatogrammen gegeben werden. In *Tab. 4* sind die Charakteristika der verwendeten Meßreihen zusammengestellt, die zum Teil ganz unterschiedlich ausfallen. Dabei sind auch Gewichte angeführt, weil sie in einem Folgebeitrag für die Kinder aus der ČSSR untersucht werden sollen.

Zieht man aus der *Tabelle 4* oder noch besser der Kenntnis der einzelnen Meßreihen und ihrer Analysen das Fazit für künftige Wachstumsuntersuchungen am Menschen, so darf für die Höhen bei Angaben in Millimetern folgende Empfehlung für die zeitlichen Abstände der Messungen gegeben werden:

0 bis 1 Jahr 3 Monate, 1 bis 3 Jahre 6 Monate, 3 bis 9 Jahre 12 Monate, 9 bis 16 Jahre 6 Monate, über 19 Jahre 12 Monate.

TABELLE 4. Übersicht des bisher vom Verfasser analysierten Datenmaterials

Quelle	MARCUSSON/ OEHMISCH	HELLBRÜG- GE/VOGT	MAASER/ FREYER	TANNER/ WHITE- HOUSE/ TAKAISHI	KLEMENTA u. Mitarb.	ARIMOTO/ YANAGI
Publ. Jahr	1961	1961	1974/1971	1965	1970/71, 1978	1960
Land	DDR	BRD	BRD	England	ČSSR	Japan
Distrikt	alle	Bayern	Nordrhein- W., Hamburg	London	Morava	nicht genannt
Probanden	294 000	ca. 105 000	ca. 200 000	ca. 50 000	12 553	unbekannt
Altersstufen in Jahren	3—21	0—19	0—14 3—18,5	0,08—19	3—25	0—19
Hauptintervall, Jahre	0,25	≤ 0,5	≤ 0,5	0,5	1	1
Längenstufen, cm	♂ 95—174 ♀ 94—162	51—175 50—165	50—177 50—164	54—174,7 53—162,2	99,3—176,3 98,7—164,4	50,2—163,2 49,3—152,4
Längenintervall, cm	1	1	1	—	—	—
Genauigkeiten, Länge, cm	1	1	1	0,1	0,1	0,1
Gewicht, kg	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

TABELLE 5. Prozentualer Anteil von Körperhöhen am Endwert nach Analysen des Verfassers (Quellen und Jahreszahlen in Tab. 4)

Land	DDR		BRD		BRD		England		ČSSR		Japan	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
0	(29,0)	(30,8)	29,1	30,3	28,1	29,9	28,7	30,7	(28,8)	(30,4)	30,7	32,2
1	(42,7)	(45,1)	44,6	45,3	43,2	44,7	42,5	44,8	(43,2)	(46,0)	45,4	48,1
2	(49,1)	(52,0)	49,9	52,1	49,9	51,8	48,9	51,6	(49,8)	(53,0)	51,8	55,0
3	54,2	57,4	54,9	57,4	55,1	57,5	54,0	57,0	55,1	58,4	56,8	60,4
4	58,6	62,1	59,1	61,9	59,5	62,4	58,3	61,7	59,6	63,1	61,1	64,9
5	62,6	66,3	62,8	65,9	63,5	66,7	62,2	65,9	63,6	67,2	64,8	68,9
6	66,2	70,1	66,2	69,5	67,0	70,8	65,7	69,7	67,3	71,0	68,3	72,5
7	69,5	73,6	69,3	72,9	70,4	74,5	69,0	73,3	70,7	74,5	71,5	75,8
8	72,7	76,9	72,2	76,0	73,4	78,0	72,1	76,7	73,8	77,7	74,5	79,0
9	75,7	80,0	75,0	79,0	76,4	81,2	75,0	80,1	76,8	80,9	77,3	82,3
10	78,6	83,2	77,6	81,9	79,2	84,4	77,9	83,7	79,6	84,2	80,2	86,0
11	81,4	86,6	80,1	84,7	82,0	87,8	80,8	87,6	82,3	87,9	83,1	89,9
12	84,6	90,5	82,6	87,8	85,1	91,9	84,0	91,6	85,3	91,9	86,3	93,2
13	88,2	94,3	85,1	91,2	88,8	94,9	87,7	95,0	89,0	95,1	89,9	95,5
14	92,2	97,0	88,1	94,1	92,9	96,8	91,6	97,5	93,2	97,3	93,3	97,1
15	95,7	98,7	91,9	96,3	96,1	98,6	95,1	99,2	96,6	98,8	96,2	98,4
16	98,0	99,6	95,7	98,1	98,3	99,6	97,6	100,0	98,6	99,7	98,2	99,3
17	99,4	100,0	98,3	99,5	99,5	100,0	99,3	100,0	99,6	100,0	99,5	99,8
18	99,9	—	99,7	100,0	100,0	—	99,9	—	100,0	—	100,0	100,0
$\tau$	(2,16)	(1,68)	2,02	1,66	2,07	1,72	2,20	1,75	(2,08)	(1,49)	1,70	1,24

Diese Zeitintervalle sollten nicht unterschritten werden, dazu gehören in allen Fällen die Geburtswerte. Unter diesen Voraussetzungen kann mit aussagekräftigen Analysen nach der in diesem Beitrag vorgestellten Form gerechnet werden.

In der Tab. 5 sind die bisher gewonnenen Resultate zusammengefaßt. Dabei haben die absoluten Größen für einen Vergleich des Wachstumsablaufs wenig Sinn, so daß der prozentuale Anteil am Endwert vorgezogen wurde. Die Zahlen sind in jährlichen Abständen gegeben und durch die Zeit  $\tau$  er-

gänzt, zu der gerade die halbe Endhöhe  $L_E + 2a$  erreicht wird. Einzelheiten zu den Analysen sind den Angaben im Literaturverzeichnis zu entnehmen. Unsicherheiten infolge fehlender Ausgangsdaten sind durch Klammern gekennzeichnet. Über die Schwankungen innerhalb eines Landes geben die Daten für die BRD einen Anhaltspunkt. Für ein extrem frühes Erreichen des Halbwerts sind die Angaben über die Japaner ein Beispiel.

Die Quintessenz der mathematischen Analysen des Humanwachstums liegt darin, daß die in den

Meßwerten noch vorhandenen Streuungen durch adäquate Wachstumsformeln ausgeglichen werden und man dadurch zu Wertefolgen gelangt, die den Namen Standards verdienen.

#### LITERATUR

- ARIMOTO K., 1960: Unpublished data from the National Institute of Nutrition. In: Altman and Dittmer, *Growth including Reproduction and Morphological Development*. Fed. Amer. Soc. Exp. Biol., Washington D. C.: 342.
- BACKMAN G., 1934: Das Wachstum der Körperlänge des Menschen. *Kungl. Vetensk. Handlingar* 14: 11–23, 37–45.
- FREYER H. U., 1971: Die Ernährung des Kindes und des Jugendlichen aus der Sicht des öffentlichen Gesundheitsdienstes. *Ernähr.-Umschau* 1: 2–7.
- FRIEDENTHAL H., 1914: *Allgemeine und spezielle Physiologie des Menschenwachstums*. Springer-Verlag.
- GOMPERTZ B., 1825: On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of live contingencies. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1825, 2: 513–585.
- HELLBRÜGGE TH. u. VOGT D., 1961: Zur Beurteilung des Wachstumsstandes mit Hilfe von Somatogrammen. *Ärztl. Mitt.* 2: 1275–1280.
- KLEMENTA J., KOMENDA S. u. KRÁTOŠKA J., 1971: Matematický model predikce somatických rozměrů a jeho využití při stanovení tělesné výšky ze známé délky nohy. *Sborník prací ped. fak. Univ. Palackého v Olomouci. Biologie* 1971: 5–25.
- KOMENDA S. u. KLEMENTA J., 1978: *Proportion of Body Dimensions in Children and Youth*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha: 231–246.
- MAASER R., 1974: Eine Untersuchung gebräuchlicher Längen/Gewichtstabellen — zugleich ein Vorschlag für ein neues Somatogramm 0–14jähriger Kinder. *M Schr. Kinderheilk.* 122: 146–152.
- MARCUSSON H., 1961: *Das Wachstum von Kindern und Jugendlichen in der DDR*. Akademie-Verlag, Berlin (Tabellen im Anhang).
- PAUL W., 1975: Ein direktes numerisches Verfahren zur Bestimmung der Parameter nichtlinearer Ausgleichsfunktionen. *Biom. Zschr.* 17: 487–500.
- PEIL J. u. HELWIN H., 1977: Quantitativ-analytische Erfassung des Körperlängenwachstums des Menschen. *Gegenbaurs morph. Jahrb.* 123: 236–259.
- PEIL J., 1979: Inverse problems in growth dynamics. In: Anger, *Inverse and improperly posed problems in differential equations. Reihe Math. Forsch. Bd. 1*. Akademie-Verlag, Berlin: 197–213.
- PFAUNDLER M. v., 1916: *Körpermaßstudien an Kindern*. Springer-Verlag.
- REINUS W., 1916: *Über die Wachstumskurven*. Inaug.-Diss. Univ. München 1916.
- SAGER G., 1981: Zur mathematischen Formulierung des menschlichen Längenwachstums. *Anatom. Anz.* 150: 428–442.
- SAGER G., 1982a: Mathematische Interpretation des Somatogramms von HELLBRÜGGE und VOGT (1961). *Anat. Anz.* (zum Druck angenommen).
- SAGER G., 1982b: Mathematical formulations for the height/weight tables of U. K. children after TANNER, WHITEHOUSE and TAKAISHI (1965). *Biom. Journ.* (zum Druck angenommen).
- SAGER G., 1982c: Mathematische Interpretation der Wachstumsdaten von DDR-Kindern nach MARCUSSON und OEHMISCH (1961). *Medizin und Sport*. (Manuskript eingereicht.)
- SAGER G., 1982d: Die Wachstumsentwicklung von MONTBEILLARD — eine historische Meßwertserie in neuer Sicht. (Manuskript in Vorbereitung.)
- SAGER G., 1983: Wachstumsrelationen bei Japanern (Manuskript abgeschlossen.)
- SCHARF J.-H. u. PEIL J., 1975: Ein Algorithmus zur Wertebestimmung der Parameter in der Gompertzchen Wachstumsfunktion. *Gegenbaurs morph. Jahrb.* 121: 389–420.
- SCHARF J.-H., 1977: Wachstum. *Verh. Anat. Gesellsch.* 71: 29–58.
- SCHARF J.-H., 1979: Der Schritt von der heuristischen Wachstumskurve zum biologischen Modell. *Gegenbaurs morph. Jahrb.* 125: 586–610.
- SCHMALHAUSEN J., 1927: Beiträge zur quantitativen Analyse der Formbildung. I. Über die Gesetzmäßigkeiten des embryonalen Wachstums. *Roux' Arch. Entw. Mech. Org.* 109: 455.
- TANNER J. M., WHITEHOUSE R. H. u. TAKAISHI M., 1966: Standards from birth to maturity for height, weight, height velocity, and weight velocity: British children, 1965, Part I and II. *Arch. Dis. Childh.* 41: 454–471 u. 613–635.
- VERHLUST P. F., 1838: Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. et Physique* 10: 113–121.
- WIENER H., 1890: Das Wachstum des menschlichen Körpers. *Verh. naturwiss. Verein Karlsruhe*, 1890: 98.
- YANAGI K. et al., 1949: Studies on dietary allowances for Japanese. *Nat. Council of Food and Nutrition*, Tokyo.

Dr. rer. nat. habil.  
GÜNTHER SAGER,  
DDR-2530 Rostock-Warnemünde,  
Grüner Weg 9.