



GUNTHER SAGER

MATHEMATISCHE FORMULIERUNG DES WACHSTUMS FÜR DEN WADENUMFANG VON ČSSR—KINDERN

ZUSAMMENFASSUNG. — In dem Werk „Proportions of Body Dimensions in Children and Youth“ von Komenda und Klementa (1978) ist eine Meßserie des Wadenumfangs von ČSSR-Kindern im Alter von 4 bis 17 Jahre enthalten, die sich über eine Serie von Prader und Budliger (1977) für schweizer Kinder von 1 Monat bis 12 Jahre ergänzen läßt. Die so entstandene Meßwertfolge kann über einen Schätzwert für die Geburtsdaten wegen des relativ glatten Übergangs der Einzelreihen mit mathematischen Modellen behandelt werden. Von den vorhandenen Methoden nach Prader und Mitarbeitern in Zürich, Tanner und Kollegen in London und Sager in Rostock wurde das 2-Komponenten-Modell des Verfassers ausgewählt. Die Ergebnisse der nichtlinearen Regressionen sind in Tabellen und graphischen Darstellungen wiedergegeben, wozu auch ein Vergleich des relativen Wachstums der Umfänge von Kopf, Brust und Wade gehört.

ABSTRACT. — In their book “Proportions of Body Dimensions in Children and Youth” Komenda and Klementa (1978) have given a series for the growth of the calf circumference of ČSSR children from 4 to 17 years of age which can be supplemented by a series of Prader and Budliger (1977) for Swiss children from one month to 12 years. As both series coincide rather well in the transition interval mathematical treatment has been tried in order to smooth the somewhat scattering data. From the models used by Prader and his collaborators at Zurich, Tanner and colleagues at London and Sager at Rostock the 2-component-model of the author was favoured after the birth values had been evaluated. Results have been compiled in tables and graphs showing the basic data, growth and growth velocity. Moreover a comparison of relative growth is added for the head, chest and calf circumference of ČSSR and GDR children respectively.

KEY WORDS: Wadenumfang — Kombination zweier Meßreihen — Mathematische Modellierung — Ausgeglichenes Wachstum — Wachstumsgeschwindigkeit — Wachstumsvergleiche.

DAS AUSGANGSMATERIAL

In ihrem Werk „Proportions of Body Dimensions in Children and Youth“ haben Komenda und Klementa (1978) für ČSSR-Kinder und Jugendliche 21 Körperdimensionen zusammengestellt, die in den meisten Fällen mit dem Alter von 4 Jahren beginnen. Aufgrund der verfügbaren Meßreihen kamen

die Verfasser zu folgender Aussage ab dem genannten Alter: “Mean values of calf circumference are increasing almost linearly with the age. There is no difference in the values of both sexes till 10 years. Girls are growing more rapidly than boys after that period till 16 years, and only in the oldest categories calf circumference of boys is higher than that of girls.”

Dazu wird ein Hinweis auf eine Abbildung gegeben, in der die Meßwerte für beide Geschlechter durch einen Streckenzug verbunden sind. Zum Vorgehen bei der Messung dient noch die Angabe der Definition des Wadenumfangs als "maximum horizontal circumference wherever found in the area of the calf muscle (tape closed on the outer side of the surface)".

Die Aussagen über die Messungen treffen im Kern zu. Sie sollen in den folgenden Ausführungen noch präzisiert und für den Zeitraum von der Geburt bis 4 Jahre ergänzt werden. Das ist letztlich nur über adäquate mathematische Methoden möglich, wobei außerdem für den fehlenden Zeitraum noch Ersatzwerte beigebracht werden müssen, da kein Modell eine solche Spanne überbrücken kann.

Dabei bietet sich die günstige Gelegenheit, Werte aus schweizer Studien heranzuziehen, die von Prader und Budliger (1977) in Zürich an Kindern im Alter von 1 Monat bis zu 12 Jahren vorgenommen worden sind. Es handelt sich um die 15 wichtigsten Körpermaße, darunter auch den Wadenumfang. Über die Meßmethode heißt es dazu: „Das Meßband wird senkrecht zur Beinlängsachse um die Wade gelegt und so kräftig angezogen, daß es nicht gleiten kann. Man mißt an verschiedenen Stellen und notiert den größten Umfang. Metallene Meßbänder sind für diese Messung etwas zu starr. Textil- und Plastik-Meßbänder müssen häufig kontrolliert werden“.

Da es sich bei dem Zeitraum von fast 0 bis 4 Jahre um weniger als $\frac{1}{4}$ des Gesamtuntersuchungsintervalls handelt, in dem Wachstum vorhanden ist, erscheint dem Verfasser eine Kombination beider Meßreihen statthaft, zumal die Schweiz und die CSSR nicht regional allzu entfernte Gebiete sind. Da die Geburtsdaten fehlen, ist ein Wert von 9 cm für beide Geschlechter postuliert worden. Abweichungen von dieser Größe verlieren mit zunehmenden Alter immer mehr an Einfluß.

Die so verwendeten Daten sind in den Tabellen 2 (♂) und 3 (♀) zusammen mit der Anzahl n der Probanden verzeichnet. Bei den mathematischen Approximationen über das 2-Komponenten-Modell nach Sager (1980) sind die Werte von n nicht verwendet worden, sie dienen nur der Information. Eine Wichtung wurde deshalb nicht vorgenommen, weil ein Blick auf die Meßpunktfolge in den Abbildungen 1 und 2 doch etliche Streuungen erkennen läßt, wenn man dagegen die ausgleichenden Kurven betrachtet.

DIE APPROXIMATIONSMETHODE

Gegenwärtig bieten sich 3 Methoden zur Approximation des Humanwachstums an, wie sie in Zürich, London und Rostock praktiziert werden, wobei die zugrundeliegenden Auffassungen jeweils recht verschieden sind (Sager 1985). Die Arbeitsgruppe um Prader verzichtet a priori auf eine biologische Modellvorstellung und geht den Weg der rein mathematischen Annäherung über glättende

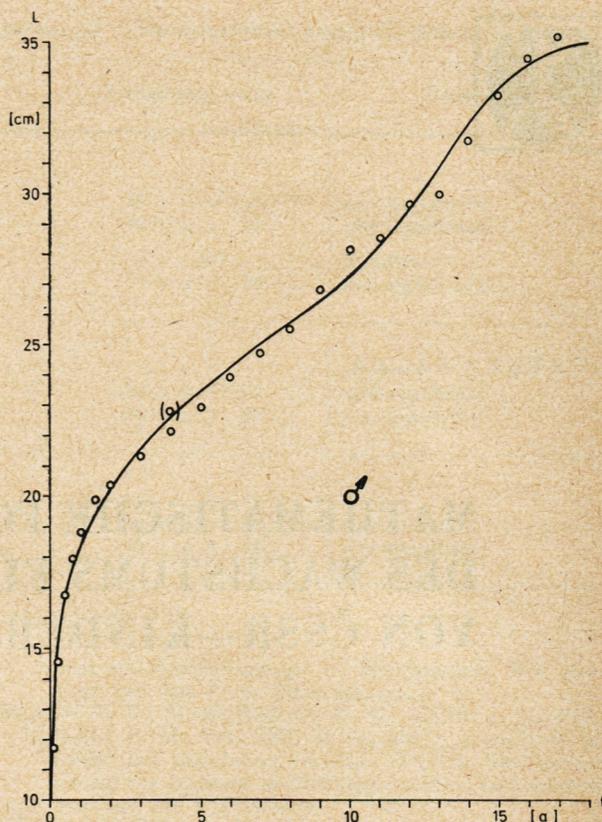


ABB. 1. Basisdaten und approximierter Verlauf des Wachstums im Wadenumfang bei CSSR-Kindern ♂.

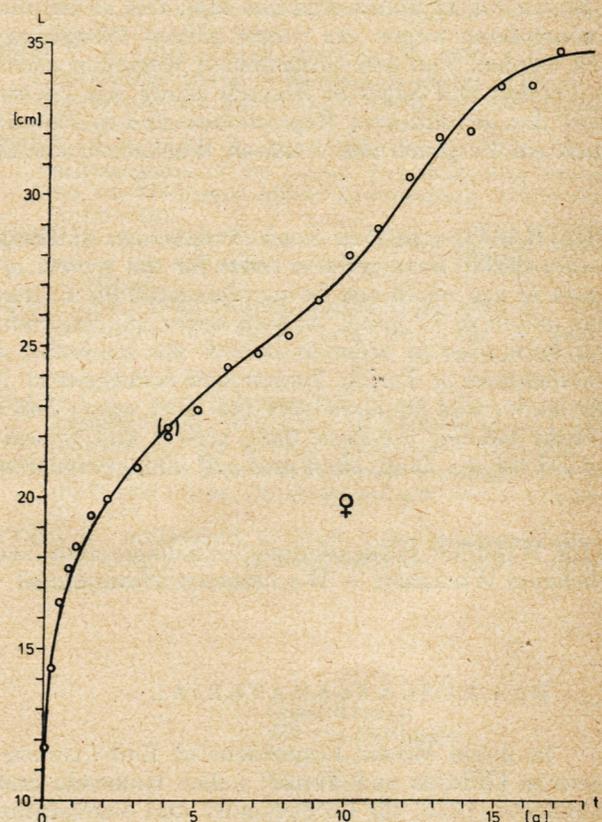


ABB. 2. Basisdaten und approximierter Verlauf des Wachstums im Wadenumfang bei CSSR-Kindern ♀.

Spline-Funktionen (shape-invariant form). Dabei handelt es sich im Prinzip um Polynome 3. Grades, bei denen an den Nahtstellen der Betrag der Funktion, die Richtung der Tangente und die Krümmung zur Übereinstimmung gebracht werden. Diese Konzeption hat ihre Vorteile bei Longitudinalstudien, weil sie relativ geschmeidig Irregularitäten im Wachstum zu folgen vermag. Als untere Grenze der Anwendbarkeit wird ein Alter von $t = 1$ Jahr genannt (Stützle 1977).

Die britische Schule um Tanner stützt sich auf die Modelle von Preece und Baines (1978), die unmittelbar auf das menschliches Längenwachstum ausgerichtet sind. Das einfachste und in der Handhabung ziemlich robuste Modell besteht im wesentlichen aus der reziproken Summe zweier Exponentialfunktionen, die von der adulten Länge subtrahiert wird. Diese Form mit 5 Parametern folgt nicht mehr allen Unregelmäßigkeiten der Längsschnittswerte, sondern hat bereits eine beachtliche glättende Wirkung. Dennoch ist sie häufig auf longitudinale Daten angewendet worden, hätte ihren eigentlichen Platz aber wohl mehr bei den Querschnittswerten. Sie wird ab einem Alter von 2 Jahren eingesetzt, kann also die Epoche des schnellen Wachstums nicht wiedergeben.

Als weitere Variante wurde etwa um die gleiche Zeit das 2-Komponenten-Modell von Sager (1980) konzipiert, das über den gesamten Zeitraum von der Geburt bis zum adulten Status reicht, wobei in der postnatalen Phase zwischen $t = 0$ und $t \approx 0,2$ a etwas überhöhte Werte auftreten können. Dieses Modell ist bereits zweimal in dieser Zeitschrift besprochen worden, nämlich bei der Approximation des Kopfumfangs (Sager 1983) und des Größenwachstums tschechischer Kinder nach Daten von Dokládál (1959), Komenda, Klementa und Mitarbeitern (1978). Deshalb genügt hier die Angabe der Formeln, deren Parameter über nichtlineare Regres-

TABELLE 1. Ergebnisse der nichtlinearen Regression bzw. semigraphischen Bestimmung der Parameter

		σ		φ	
		[2]	[1]	[2]	[1]
L_0 (fix)	[cm]	9,0	9,0	9,0	9,0
t_E (fix)	[a]	18,0	18,0	18,0	18,0
r		0,30373	0,27391	0,30848	0,29196
s		17,17293	10,39454	7,59284	16,28968
L_E	[cm]	30,21672	29,07497	29,50621	29,44999
a	[cm]	nicht	3,0	2,7	nicht
b	[a ⁻¹]	weiter	0,36	0,40	weiter
t^*	[a]	bearbeitet	13,0	12,2	bearbeitet
$L_E + 2a$	[cm]	—	35,07	34,91	—
$\Sigma f $	[cm]	—	10,61	9,15	—
$\frac{1}{n} \Sigma f $	[cm]	—	0,48	0,42	—

sionen (Tabelle 1) bzw. semigraphische Verfahren (Tabelle 2 und 3) bestimmt worden sind.

Die 1. Komponente berücksichtigt nur das Basiswachstum ohne den Wachstumsschub als

TABELLE 2. Approximation des Wadenumfangs von ČSSR-Kindern σ [1]

Alter t [a]	Probanden n	Umfang [cm]	Basisfunktion	Gesamtwert	Anteil am Endwert
0	—	9	9,0	9,0	0,257
1/12	192	11,73	13,7	13,7	0,391
3/12	179	14,58	15,4	15,4	0,439
6/12	179	16,73	16,7	16,7	0,477
9/12	181	17,93	17,6	17,6	0,503
1	181	18,81	18,3	18,3	0,523
1,5	173	19,87	19,4	19,4	0,554
2	169	20,41	20,3	20,3	0,578
3	165	21,32	21,6	21,6	0,616
4	168	22,17	22,6	22,6	0,646
5	60	22,9	23,5	23,5	0,671
6	60	23,9	24,2	24,3	0,693
7	60	24,7	24,9	25,0	0,713
8	60	25,5	25,5	25,7	0,732
9	60	26,8	26,0	26,4	0,752
10	60	28,1	26,5	27,2	0,774
11	60	28,5	27,0	28,2	0,803
12	60	29,6	27,4	29,4	0,838
13	60	29,9	27,8	30,8	0,879
14	60	31,7	28,2	32,2	0,919
15	60	33,2	28,5	33,4	0,952
16	60	34,4	28,8	34,2	0,975
17	60	35,1	29,0	34,7	0,989
18	—	—	29,1	34,9	0,995

TABELLE 3. Approximation des Wadenumfangs von ČSSR-Kindern φ [2]

Alter t [a]	Probanden n	Umfang [cm]	Basisfunktion	Gesamtwert	Anteil am Endwert
0	—	9	9,0	9,0	0,258
1/12	184	11,71	13,1	13,1	0,374
3/12	181	14,37	14,7	14,7	0,421
6/12	189	16,53	16,1	16,1	0,460
9/12	178	17,62	17,0	17,0	0,487
1	180	18,37	17,7	17,7	0,508
1,5	168	19,39	18,9	18,9	0,542
2	169	19,96	19,8	19,8	0,568
3	167	21,04	21,3	21,3	0,610
4	165	21,97	22,4	22,4	0,643
5	60	22,9	23,4	23,4	0,670
6	60	24,4	24,2	24,3	0,695
7	60	24,8	24,8	25,0	0,717
8	60	25,4	25,5	25,8	0,739
9	60	26,6	26,1	26,6	0,763
10	60	28,1	26,8	27,6	0,790
11	60	29,0	27,3	28,8	0,825
12	60	30,7	27,8	30,3	0,867
13	60	32,0	28,2	31,8	0,910
14	60	32,2	28,6	33,0	0,945
15	60	33,7	29,0	33,9	0,970
16	60	33,7	29,3	34,4	0,985
17	60	34,9	29,4	34,7	0,995
18	—	—	29,5	34,9	0,998

$$L = L_0 + A \left(\frac{t}{t_E} \right)^r \left[B - \left(\frac{t}{t_E} \right)^s \right] \quad (1)$$

mit

$$A = (L_E - L_0) \frac{r}{s}, \quad B = \frac{s}{r} + 1.$$

L_0 ist die Geburtslänge, L_E eine fingierte Länge des adulten Menschen ohne Schub, wie sie bei gesunden Jugendlichen nicht sichtbar wird, aber bei genetisch gestörten Kindern (Chromosomen-Aberrationen) in Erscheinung treten kann (Sager und Pelz 1985). Die Größe t_E ist der Zeitpunkt, zu dem das Wachstum aufhört. Die Exponenten r und s sind Parameter, die wie L_E aus der nichtlinearen Regression der Meßdaten von der Geburt bis zur Pubeszenz gewonnen werden, in dem folgenden Beispiel bis 10 a für die Jungen und bis 9 a für die Mädchen. Der Parameter r ist wenig, s dagegen hoch sensibel, wie dies *Tabelle 1* erkennen läßt.

Die 2. Komponente beinhaltet den Wachstumsschub, für den man in erster Näherung die logistische Funktion von Verhulst (1838) ansetzen kann, die sich als

$$\Delta L = 2a / [1 + e^{-2b(t-t^*)}] = a [1 + \tanh b(t-t^*)] \quad (2)$$

schreiben läßt. Darin ist $2a$ der Betrag zwischen den beiden Asymptoten $\Delta L = 0$ ($t \rightarrow -\infty$) und $\Delta L = 2a$ ($t \rightarrow +\infty$). b gewinnt im Zusammenhang mit a für die Richtung der Tangente im Wendepunkt von (2) Anschaulichkeit, da $\Delta \dot{L}(t^*) = ab$ ist, also

$$b = \Delta \dot{L}(t^*) / a \quad (3)$$

wird. Weitere Einzelheiten sind den vorausgegangenen Beiträgen zu entnehmen.

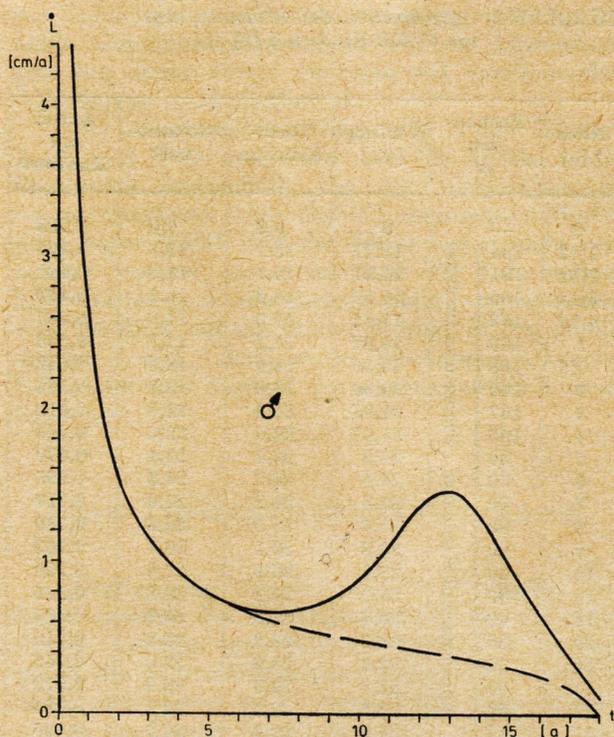


ABB. 3. Zuwachskurven zu Abbildung 1.

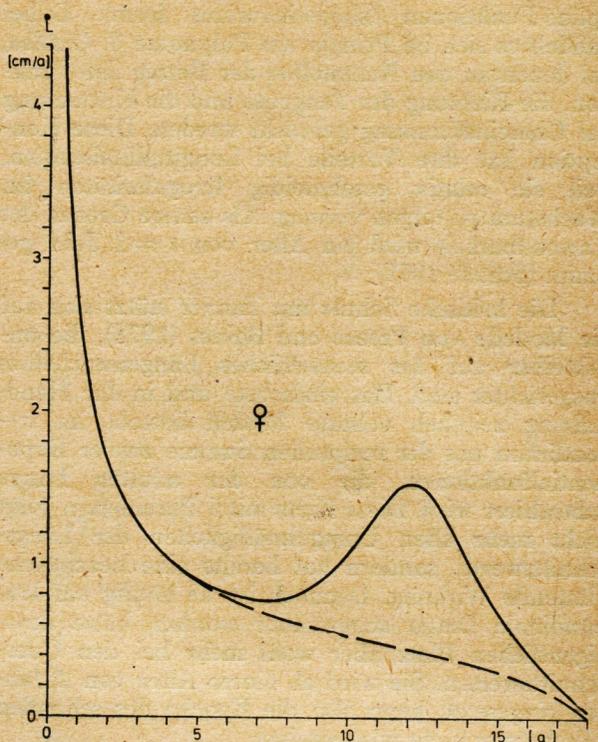


ABB. 4. Zuwachskurven zu Abbildung 2.

DIE ERGEBNISSE DER MATHEMATISCHEN BEHANDLUNG

In der *Tabelle 1* stehen neben den fixen Werten L_0 und t_E zunächst die Parameter r , s und L_E der 1. Komponente. Die Bezeichnungen [2] und [1] weisen auf die Art der Minimierung hin, die nach Paul (1975) die Summen der Fehlerquadrate oder Fehlerbeträge erfassen kann. Dann folgen die Schubparameter a , b und t^* , wobei diese wegen der Streuungen in der puberalen Phase (*Abb. 1 und 2*) mit Unsicherheiten behaftet bleiben. Das trifft auch auf den theoretischen Endwert $L_E + 2a$ zu. Am Ende der *Tabelle 1* findet man die Fehler der Approximationen von der Geburt bis zum adulten Status als Summen und mittleren Einzelwert der absoluten Beträge, der nicht mit der Standardabweichung verwechselt werden darf. Dabei resultieren die Werte von knapp $\frac{1}{2}$ cm aus den Streuungen der Ausgangsdaten und nicht aus mangelnder Flexibilität des verwendeten Modells.

Die *Tabellen 2 und 3* enthalten für den Wadenumfang die Ausgangsdaten, die Werte der 1. Komponente und deren Addition mit der 2. Komponente zum Endwert. Schließlich ist noch der Wert für die einzelnen Altersstufen als Anteil am theoretisch ermittelten Endwert angegeben, so daß man einen Überblick der Entwicklung hat, die einen Vergleich des relativen Wachstums bei den ♂ und ♀ gestattet.

Die *Abbildungen 1 und 2* enthalten die Originaldaten sowie die berechneten Wachstumskurven für die ♂ und ♀. Man sieht daraus, daß die schweizer und tschechischen Daten offenbar recht akzeptable

TABELLE 4. Vergleich des approximierten relativen Wachstums von Körperumfängen (Kopf, Brust und Wade) als $L/(L_E + 2a)$ nach Sager (1983, 1984)

Alter <i>t</i> [a]	Kopf (ČSSR)		Brust (DDR)		Wade (ČSSR*)	
	♂ [1]	♀ [1]	♂ [1]	♀ [2]	♂ [1]	♀ [2]
0	0,628	0,632	(0,394)	(0,417)	(0,257)	(0,258)
0,5	0,786	0,793	(0,479)	(0,504)	0,477	0,460
1	0,820	0,826	(0,510)	(0,535)	0,523	0,508
2	0,857	0,863	0,554	0,578	0,578	0,568
3	0,880	0,886	0,586	0,610	0,616	0,610
4	0,895	0,902	0,614	0,637	0,646	0,643
5	0,907	0,915	0,638	0,660	0,671	0,670
6	0,916	0,925	0,659	0,681	0,693	0,695
7	0,924	0,933	0,679	0,700	0,713	0,717
8	0,930	0,940	0,698	0,720	0,732	0,739
9	0,936	0,948	0,716	0,740	0,752	0,763
10	0,942	0,956	0,735	0,765	0,774	0,790
11	0,948	0,966	0,757	0,797	0,803	0,825
12	0,955	0,977	0,785	0,839	0,838	0,867
13	0,963	0,986	0,820	0,888	0,879	0,910
14	0,972	0,993	0,864	0,933	0,919	0,945
15	0,981	0,996	0,909	0,966	0,952	0,970
16	0,988	0,998	0,948	0,986	0,975	0,985
17	0,993	0,999	0,974	0,995	0,989	0,995
18	0,996	1,000	0,989	0,998	0,995	0,998

*) Werte bis 4 a nach schweizer Daten.
(.) Daten in Klammern sind unsicher

bel zusammenpassen, was eine Voraussetzung für die mathematische Behandlung ist. In den Abbildungen 3 und 4 sind die ersten zeitlichen Derivierten, also die Wachstumsgeschwindigkeiten oder Zuwächse dargestellt, wobei die Komponente 1 sowie die Addition mit der Komponente 2 zu erkennen sind. Es zeigt sich ein recht beachtlicher Zuwachsbuckel bei beiden Geschlechtern. Die Formeln für die Berechnungen sind in dem Beitrag über das Größenwachstum von ČSSR-Kindern zu finden (Sager 1984) und brauchen daher nicht wiederholt zu werden.

In der Tabelle 4 ist das relative Wachstum für den Umfang der Wade mit demjenigen für den Kopf und die Brust nach Analysen des Verfassers

gegenübergestellt. Dadurch wird bei Vergleichen von Meßserien aus verschiedenen Jahren von der Akzeleration praktisch nur die Vorverlegung der Pubertät deutlich, während die Zunahme der absoluten Werte in den Hintergrund tritt. Die Daten bei 18 a sind unterschiedlich entsprechend dem jeweils angenommenen Ende des Wachstums, das aus Datenreihen kaum exakt fixierbar ist.

LITERATUR

- DOKLÁDAL M., 1959: Growth of the main head dimensions from birth up to twenty years of age in Czechs. *Hum. Biol.* 31: 90–109.
- KOMENDA S., KLEMENTA J., 1978: *Proportion of Body Dimensions in Children and Youth*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha: 231–246.
- PAUL W., 1975: Ein direktes numerisches Verfahren zur Bestimmung der Parameter nichtlinearer Ausgleichsfunktionen. *Biom. Zschr.* 17: 487–500.
- PRADER A., BUDLIGER H., 1977: Körpermasse, Wachstumsgeschwindigkeit und Knochenalter gesunder Kinder in den ersten zwölf Jahren. *Helvetica Paediatrica Acta*, Supplementum 37: 1–44.
- PREECE M. A., BAINES M. J., 1978: A new family of mathematical models describing the human growth curve. *Ann. Human Biol.* 5: 1–24.
- SAGER G., 1981: Zur mathematischen Formulierung des menschlichen Längenwachstums. *Anat. Anz.* 150: 428–442.
- SAGER G., 1983: Zur Entwicklung des Kopfumfanges tschechischer Kinder nach Daten von Dokládál, Komenda und Klementa (1978). *Anthropologie XXI/1*: 77–81.
- SAGER G., 1984: Die mathematische Darstellung des Größenwachstums von ČSSR – Kindern nach Daten von Klementa, Komenda und Mitarbeitern. *Anthropologie XXII/1*: 3–9.
- SAGER G., 1985: Zum Stand der mathematischen Formulierung des menschlichen Längenwachstums. *Acta Universitatis Palackianae Olomouensis, Reihe Mathematica et Polytechnica* (im Druck).
- SAGER G., PELZ L., 1985: Aspects of the growth dynamics of body height in classical chromosome diseases. Part I: Mathematical modelling. *European Journ. Pediatr.* (zum Druck eingereicht).
- STUETZLE W., 1977: Estimation and parameterization of growth curves. *Ph. D. thesis*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.
- VERHULST P. F., 1838: Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. et Physique* 10: 113–121.

Dr. rer. nat. habil. Günther Sager,
DDR – 2530 Rostock-Warne-
münde,
Grüner Weg 9.